Die negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte, dargestellt als Rollkurven.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

VORGELEGT

VON

GUSTAV PEESCHKE
AUS BERLIN.

BERLIN.

DRUCK VON H. S. HERMANN.

1890.

Die negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte, dargestellt als Rollkurven.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

VORGELEGT

VON

GUSTAV PEESCHKE
AUS BERLIN.

BERLIN.

DRUCK VON H. S. HERMANN.

1890.

Referent: Prof. Dr. Staude.

Einleitung.

Wenn eine Kurve, die Erzeugende, längs einer andern Kurve, der Basis, rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt ein mit der ersten Kurve fest verbundener Punkt eine neue Kurve, die man Rollkurve, oder Roulette nennt.

Die bekannteste, von den Mathematikern zuerst diskutierte Roulette ist die Cycloide, d. i. diejenige Kurve, welche von einem Punkte eines Kreises beschrieben wird, der auf einer Geraden rollt. Sie soll (Suter, Geschichte der mathem. Wissenschaften. Zürich 1875. Bnd. II, pag. 11 — 12) von Galilei erdacht worden sein, und ihre Eigenschaften sind von Roberval, Descartes, Huygens, Pascal u. a. untersucht worden. Die Erfindung der Epicycloiden, d. h. derjenigen Kurven, welche ein Punkt eines Kreises beschreibt, der längs eines zweiten Kreises rollt, schreibt Leibniz (Chasles, Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohncke. Halle 1839. pag. 115) dem dänischen Astronomen Roemer zu, der auch ihre Verwendung in der Mechanik zur Konstruktion der Zahnräder ersonnen hat. Sie wurden bald der Ausgangspunkt zur Betrachtung der allgemeinen Rouletten, die durch das Rollen einer beliebigen Kurve auf einer beliebigen andern erzeugt werden. Diese allgemeinen Rollkurven sind vornehmlich von Leibniz, de la Hire und Nicolas untersucht worden und spielen in der Kinematik eine hervorragende Rolle.

In der mathematischen Literatur finden sich, abgesehen von zahlreichen Schriften über die Cycloiden, auch mehrere Arbeiten über andere Rollkurven. Hartmann (Untersuchung

einiger Kurven, welche durch Rollen von Kegelschnitten erzeugt werden.. Inaug. Diss. Marburg 1876) behandelt die Aufgabe: diejenigen Kurven zu bestimmen, längs welcher eine Kegelschnittlinie rollen muss, damit ein Brennpunkt der letzteren eine gerade Linie beschreibt. Reinhardt (Untersuchung einiger durch das Rollen von Kegelschnitten entstehenden Kurven. Inaug. Diss. Marburg 1885) bestimmt diejenige Kurve, welche ein Brennpunkt eines Kegelschnitts beschreibt, wenn letzterer auf einer Geraden als Basis rollt. Bellermann (Festschrift zum 50jährigen Jubiläum der königstädtischen Realschule zu Berlin, herausgeg. v. d. Lehrern. Berlin 1882) untersucht diejenige Roulette, welche entsteht, wenn eine Cycloide auf einer andern rollt. Kessler (Darstellung der Kegelschnitte als Rouletten. Inaug. Diss. Jena 1869) stellt die Kegelschnitte als Rollkurven dar, deren Basis eine Gerade ist.

Diese Arbeiten haben den Verfasser veranlasst, auch die negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte als Rollkurven darzustellen, zumal da die ausgezeichneten Punkte dieser Kurven — sofern überhaupt welche vorhanden sind — bei dieser Darstellungsweise deutlich hervortreten.

Unter der negativen Fusspunktenkurve einer gegebenen Kurve versteht man die Enveloppe derjenigen Senkrechten, welche auf den Verbindungslinien der Punkte der gegebenen Kurve mit einem festen Punkt errichtet werden. Der feste Punkt wird Pol genannt; fällt man von demselben auf die Tangenten der negativen Fusspunktenkurve Lote, so bilden die Endpunkte dieser Lote die gegebene Kurve.

In diesem Sinne ist z. B. die negative Fusspunktenkurve einer Geraden für einen ausserhalb der letzteren gelegenen Punkt als Pol eine Parabel, deren Brennpunkt der gegebene Punkt und deren Scheiteltangente die gegebene Gerade ist, und die negative Fusspunktenkurve eines Kreises für einen innerhalb gelegenen Punkt eine Ellipse, für einen ausserhalb gelegenen Punkt eine Hyperbel.

Die negative Fusspunktenkurve der Ellipse für den Mittelpunkt als Pol ist zuerst von Roche (Annales de mathémathiques pures et appliqués; rédig. p. Gergonne, Nismes 1823 — 24 t. XIV, pag. 207.) behandelt worden; er drückt die Koordinaten jedes Punktes der Kurve als Funktionen eines Parameters aus und giebt vermittelst der gefundenen Gleichungen eine Diskussion.

Talbot (Annales de mathém. pur. et appl. réd. p. Gergonne, Nismes 1823 — 24. t. XIV, pag. 380.) giebt die Rektification der negativen Fusspunktenkurve der Ellipse, ohne ihre Gleichung aufzustellen; man nennt diese Kurve daher auch die Kurve des Talbot. Tortolini (Annali di scienze mat. et fis. comp. da B. Tortolini, Roma 1855, t. VI, pag. 459.) stellt die direkte Gleichung zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes der genannten Kurve auf und findet, dass die letztere von der sechsten Ordnung ist.

Eine allgemeine analytische Behandlung der negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte giebt Salmon (Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Leipzig. Art. 122 — 123). Derselbe stellt auch die Gleichung der negativen Fusspunktenkurve der Parabel auf, ohne aber auf die Gestalt der Kurven näher einzugehen.

Ameseder (Theorie der negativen Fusspunktenkurven; Grunerts Archiv 1879. Bnd. 64) behandelt die negativen Fusspunktenkurven synthetisch; er stellt namentlich die Klasse und Ordnung der negativen Fusspunktenkurve einer allgemeinen Kurve n ter Ordnung fest.

Endlich sind die negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte noch von Willig (Beiträge zur Kenntniss der negativen Fusspunktenkurven, insbesondere derjenigen der Kegelschnitte. Inaug. Diss. Giessen 1886.) behandelt worden. Er giebt ihre Gleichungen in Tangentialkoordinaten und findet dadurch, dass die negative Fusspunktenkurve, die mit einer Kurve n ter Ordnung erzeugt wird, im allgemeinen eine Kurve $2n$ ter Klasse ist. Er drückt ferner die Koor-

dinaten eines Punktes der negativen Fusspunktenkurve als Funktionen des entsprechenden Punktes der Leitkurve aus und findet daraus die Ordnung der negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte, sowie die Anzahl und die Lage ihrer Asymptoten.

Im Folgenden wird zunächst die Gleichung der Talbotschen Linie, wie sie von Roche, Tortolini u. a. aufgestellt worden ist, sowie die Gleichung der negativen Fusspunktenkurve der Parabel nach Salmon-Fiedler reproduciert; dann wird die Gleichung der negativen Fusspunktenkurve der Ellipse für den Scheitel als Pol und die der negativen Fusspunktenkurve der Hyperbel für den Mittelpunkt und für den Scheitel als Pol aufgestellt, und endlich werden die genannten Kurven als Rollkurven dargestellt, deren Basis eine Gerade ist.

§ 1. Die negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte.

Die Polargleichung einer gegebenen Kurve in Bezug auf den Koordinaten-Anfangspunkt als Pol sei $F(r, \varphi) = 0$; die Gleichung der im Endpunkt des Leitstrahls r auf diesem errichteten Senkrechten ist alsdann, in rechtwinkeligen Koordinaten ausgedrückt:

$$x. \cos \varphi + y \sin \varphi = r$$

Differentiiert man dieselbe nach φ, so folgt

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{dr}{d\varphi}$$

und es ergiebt sich somit die Gleichung der Enveloppe aller dieser Senkrechten, d. h. die Gleichung der verlangten negativen Fusspunktenkurve durch Elimination von r und φ aus den drei Gleichungen

$$F(r, \varphi) = 0$$

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = r.$$

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{dr}{d\varphi}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergeben sich die Koordinaten x und y

$$1) \quad \begin{aligned} x &= r \,.\, cos\,\varphi - \frac{dr}{d\varphi} sin\,\varphi \\ y &= r \,.\, sin\,\varphi + \frac{dr}{d\varphi} cos\,\varphi \end{aligned}$$

Sieht man φ als veränderlichen Parameter und r mit Rücksicht auf die Gleichung $F(r, \varphi) = o$ als Funktion von φ an, so können die Gleichungen 1) als die Gleichungen der negativen Fusspunktenkurve gelten.

Die Polargleichung der Ellipse für den Mittelpunkt als Pol ist

$$r = \frac{ab}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

demnach ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = - \frac{ab\,(a^2 - b^2)\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

und es gehen somit die Gleichungen 1) über in

$$x = \frac{ab\,cos\,\varphi}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ab\,(a^2 - b^2)\,sin^2\,\varphi\,cos\,\varphi}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \frac{ab\,.\,sin\,\varphi}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ab\,(a^2 - b^2)\,sin\,\varphi\,cos^2\,\varphi}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

oder:

$$2) \quad \begin{aligned} x &= \frac{ab\,cos\,\varphi\,[2a^2 sin^2\,\varphi + b^2\,(cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi)]}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ y &= \frac{ab\,sin\,\varphi\,[2b^2 cos^2\,\varphi - a^2\,(cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi)]}{(a^2 sin^2\,\varphi + b^2 cos^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen 2) repräsentieren die negative Fusspunktenkurve der Ellipse, falls man φ als veränderlichen Parameter ansieht.

Setzt man $a^2 + b^2\,cotg^2\,\varphi = z$ und $a^2 - b^2 = c^2$, so ergeben sich die von Roche aufgestellten Gleichungen:

$$x^2 = \frac{a^2\,(z + c^2)^2\,(z - a^2)}{z^3}; \quad y^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{[(b^2 - c^2)\,z + a^2\,c^2]^2}{z^3}$$

Die Elimination von φ ergiebt die endliche Gleichung (Tortolini, l. c.)

$$[4(a^4 + b^4 - a^2 b^2) - 3(a^2 x^2 + b^2 y^2)]^3 =$$
$$[9a^2(2b^2 - a^2)x^2 + 9b^2(2a^2 - b^2)y^2 - 4(a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)]^2$$

Da die Tangente der negativen Fusspunktenkurve auf dem Radius Vektor r der Ellipse senkrecht steht, und dieser mit der Abscissenachse den Winkel φ bildet, so ist der Winkel, den die Tangente mit der Abscissenachse einschliesst, $\psi = 90^0 + \varphi$ und somit ist $\frac{dy}{dx} = tg\,\psi = -\,cotg\,\varphi$, ein Resultat, welches sich auch direkt ergiebt, da

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{ab\,sin\,\varphi\,(2a^4\,sin^2\,\varphi - a^2 b^2 + 2b^4\,cos^2\,\varphi)}{(a^2\,sin^2\,\varphi + b^2\,cos^2\,\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = +\frac{ab\,cos\,\varphi\,(2a^4\,sin^2\,\varphi - a^2 b^2 + 2b^4\,cos^2\,\varphi)}{(a^2\,sin^2\,\varphi + b^2\,cos^2\,\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

Ist $a \leq b\sqrt{2}$, so nimmt x für alle Werte von φ, die zwischen 0^0 und 90^0 liegen, kontinuierlich von $x = a$ bis $x = 0$ ab, während y für dieselben Werte von φ kontinuierlich von $y = 0$ bis $y = b$ wächst; in den drei übrigen Quadranten ist der Lauf der Kurve ein analoger, derartig, dass die Kurve zur x-Achse wie zur y-Achse symmetrisch ist. (Fig. 4).

Ist $a > b\sqrt{2}$, so wächst x anfänglich und zwar so lange, bis der Parameter φ den Wert $arc\,tg\,\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{2a^2 - b^2}}$ erreicht hat; für diesen Wert von φ wird $x = \frac{2(2a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}.a\,(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}$; von da ab nimmt x beständig ab, bis es bei $\varphi = 90^0$ zu null wird. Die Ordinate y, die für $\varphi = 0$ verschwindet, ist negativ für alle Werte von φ, die zwischen 0 und $arc\,cos\,\frac{a}{\sqrt{2}\,(a^2 - b^2)}$ liegen, für $\varphi = arc\,cos\,\frac{a}{\sqrt{2}\,(a^2 - b^2)}$ verschwindet sie wiederum, geht dann für ein grösseres φ ins Positive über und erreicht für $\varphi = 90^0$ ihren grössten Wert $y = b$. Die drei übrigen Zweige

der Kurve sind analog, dergestalt, dass die letztere zu den beiden Achsen symmetrisch ist. (Fig. 7).

Die Gleichungen der negativen Fusspunktenkurve der Hyperbel ergeben sich aus denen der negativen Fusspunktenkurve der Ellipse, wenn man $b\sqrt{-1}$ statt b setzt; sie werden somit:

$$3)\quad \begin{aligned} x &= -\frac{ab\cos\varphi\,[2a^2\sin^2\varphi - b^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ y &= +\frac{ab\sin\varphi\,[2b^2\cos^2\varphi + a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

und es ist wiederum $\frac{dy}{dx} = -\cot g\,\varphi$

Die Elimination von φ aus den Gleichungen 3) ergiebt:

$$[4(a^4 + b^4 + a^2b^2) - 3(a^2x^2 - b^2y^2)]^3 =$$

$$[9a^2(2b^2+a^2)x^2 + 9b^2(2a^2+b^2)y^2 + 4(a^2-b^2)(2a^2+b^2)(2b^2+a^2)]^2$$

Für $\varphi = 0$ wird $x = a$ und $y = 0$; wächst φ, so nimmt die Abscisse x ab, die Ordinate y aber wird grösser; für $\varphi = arc\,sin\,\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$, ist $x = 0$, $y = \frac{2a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$. Wird φ grösser als $arc\,sin\,\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$, so geht x ins Negative über, y wächst weiter im Positiven fort; für $\varphi = arc\,tg\,\frac{b}{a}$ wird $x = -\infty$, $y = +\infty$; für alle Werte von φ, die zwischen $arc\,tg\,\frac{b}{a}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen, sind x und y imaginär. Auch die negative Fusspunktenkurve der Hyperbel ist zu den Koordinaten-Achsen symmetrisch gelegen. (Fig. 8.)

Die Polargleichung der Parabel für den Koordinaten-Anfangspunkt als Pol ist $r = 2a\,.\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, wo $2a$ der Parameter ist. $\frac{dr}{d\varphi}$ wird gleich $\frac{2a(\sin^2\varphi - 2)}{\sin^3\varphi}$, und somit gehen die Gleichungen 1) über in

$$x = 2a \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} - 2a \cdot \frac{\sin^2 \varphi - 2}{\sin^2 \varphi}$$

$$y = 2a \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + 2a \cdot \frac{(\sin^2 \varphi - 2) \cos \varphi}{\sin^3 \varphi}$$

Die Gleichungen der negativen Fusspunktenkurve der Parabel werden demnach:

$$4)\ x = 2a \cdot \frac{3 - 2\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi},\quad y = -4a \cot g^3 \varphi$$

Die Elimination von φ ergiebt:

$$x = 2a + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2}} \sqrt{y^2}$$

d. h. die negative Fusspunktenkurve der Parabel ist eine Neilsche Parabel, deren Scheitel um den Parameter $2a$ vom Scheitel der gegebenen Parabel entfernt ist.

§ 2 Die negativen Scheitel-Fusspunktenkurven.

Unter der negativen Scheitel-Fusspunktenkurve der Ellipse oder Hyperbel soll im Folgenden diejenige negative Fusspunktenkurve verstanden werden, welche man erhält, wenn ein Scheitel der Hauptachse als Pol genommen wird.

Die Scheitelgleichung der Ellipse ist $y^2 = 2ax - \beta x^2$, falls man die Halbachsen mit $\frac{a}{\beta}$ und $\frac{a}{\sqrt{\beta}}$ bezeichnet. Die Polargleichung der Ellipse in Bezug auf einen Scheitel als Pol wird somit:

$$r = \frac{2a \cos \varphi}{\sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2a \sin \varphi (\sin^2 \varphi - 2 + \beta \cos^2 \varphi)}{(\sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi)^2}$$

Demnach gehen die Gleichungen 1) § 1 über in:

$$x = \frac{2a \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi} - \frac{2a \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - 2 + \beta \cos^2 \varphi)}{(\sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi)^2}$$

$$y = \frac{2a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi} + \frac{2a \sin\varphi \cos\varphi (\sin^2\varphi - 2 + \beta\cos^2\varphi)}{(\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)^2}$$

oder

$$x = 2a \cdot \frac{\sin^2\varphi (3 - 2\sin^2\varphi)(1 - \beta) + \beta}{(\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)^2}$$

$$y = -\frac{4a(1-\beta)\sin\varphi\cos^3\varphi}{(\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)^2}$$

Nimmt man als Ordinatenachse das in der Entfernung $2a$ vom alten Anfangspunkt auf der x-Achse errichtete Lot, so ergeben sich als Gleichungen der negativen Scheitel-Fusspunktenkurve der Ellipse:

1)
$$x = 2a(1-\beta) \cdot \frac{\cos^2\varphi (3\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)}{(\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)^2}$$

$$y = -\frac{4a(1-\beta)\cdot\sin\varphi\cos^3\varphi}{(\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)^2}$$

Durch die Elimination von φ folgt:

$$27a^2y^2(1-\beta)^2 - 2a(1-\beta)x(x^2 + 9\beta y^2) + \beta(x^2 + \beta y^2)^2 = 0^*)$$

Es wird ferner:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{4a(1-\beta)(\beta\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{(\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)^3}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{4a(1-\beta)(\beta\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi)\cos^2\varphi}{(\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)^3}$$

Für $\varphi = 0$ wird $x = \frac{2a}{\beta} - 2a$, $y = 0$; wächst φ von 0 bis $arc\ tg \sqrt{\frac{\beta}{3}}$, so wächst x von $\frac{2a}{\beta} - 2a$ bis $\frac{9a(1-\beta)}{4\beta}$ und y nimmt ab bis zu dem Werte $-\frac{a(1-\beta)3\sqrt{3}}{4\beta\sqrt{\beta}}$; dies sind die Maximalwerte von x und y. Wird φ noch grösser als $arc\ tg \sqrt{\frac{\beta}{3}}$, so

*) Diese Gleichung ist vom 4ten Grade. Willig (l. c.) hat allgemein nachgewiesen, dass die negative Fusspunktenkurve der Ellipse und Hyperbel von der 5ten Ordnung ist, wenn der Pol auf der Kurve liegt und von der 4ten Ordnung, wenn der Pol in den einen Scheitel rückt.

nehmen x und der absolute Wert von y beständig ab, bis für $\varphi = 90°$ beide Koordinaten verschwinden. Für diejenigen Werte von φ, welche zwischen 90° und 180° liegen, ergiebt sich der oberhalb der Abscissenachse liegende Teil der Kurve; derselbe ist dem unteren Teil kongruent. (Fig. 1).

Die Scheitelgleichung der Hyperbel ist $y^2 = 2\alpha x + \beta x^2$, falls man die Halbachsen mit $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ bezeichnet. Die Gleichungen der negativen Scheitel-Fusspunktenkurve der Hyperbel ergeben sich somit aus den Gleichungen der negativen Scheitel-Fusspunktenkurve der Ellipse dadurch, dass $-\beta$ statt $+\beta$ gesetzt wird; sie werden also, wenn man wieder die y-Achse um 2α parallel sich selbst verschiebt:

$$2) \qquad x = 2\alpha(1+\beta).\ \frac{\cos^2\varphi\,(3\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)}{(\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)^2}$$

$$y = -\frac{4\alpha(1+\beta)\sin\varphi\cos^3\varphi}{(\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)^2}$$

Durch Elimination von φ folgt:

$$27\alpha^2 y^2 (1+\beta)^2 - 2\alpha(1+\beta)\,x\,(x^2 - 9\beta y^2) - \beta(x^2 - \beta y^2)^2 = 0$$

Für $\varphi = 0$ wird $x = -\frac{2\alpha}{\beta} - 2\alpha$, $y = 0$; wächst φ, so wird x grösser und y wird negativ; für $\varphi = arc\,tg\,\sqrt{\frac{\beta}{3}}$ verschwindet x; wird φ noch grösser, so geht x ins Positive über, während der absolute Wert von y immer weiter wächst; für $\varphi = arc\,tg\,\sqrt{\beta}$ wird $x = +\infty$ und $y = -\infty$; wird $\varphi > arc\,tg\,\sqrt{\beta}$, so nehmen beide Koordinaten ihrem absoluten Werte nach ab, und man erhält den auf der positiven Seite der x-Achse liegenden Zweig der Kurve; für $\varphi = 90°$ wird $x = 0$, $y = 0$. Die Kurve ist zur Abscissenachse symmetrisch und zwar ergeben sich die übrigen Zweige für alle Werte von φ, die zwischen 90° und 180° liegen. (Fig. 2). Die Durchschnittspunkte der Kurve mit der y-Achse sind

$$x = 0,\ y = \pm\frac{3\alpha\sqrt{3}(1+\beta)}{\beta\sqrt{\beta}}.$$

Ist die Hyperbel eine gleichseitige, so ist $\beta = 1$; die Gleichung der negativen Fusspunktenkurve ist dann die folgende

$$3)\quad 108a^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4ax(x^2 - 9y^2)$$

Die Kurve schneidet dann die Ordinatenachse in der Entfernung $6a\sqrt{3}$ und die Abscissenachse in der Entfernung $-4a$ vom Anfangspunkt.

§ 3. Die Rouletten.

Ist $\varphi(\xi, \eta) = o$ die Basis, $F(r, \vartheta) = 0$ die Polargleichung der Erzeugenden in Bezug auf den festen Punkt P als Pol, und sind die Koordinaten der von P beschriebenen Roulette x und y, so gelten die folgenden Gleichungen:*)

$$1)\quad \begin{cases} x - \xi = -\dfrac{rp}{\sqrt{1+p^2}} \\ y - \eta = +\dfrac{r}{\sqrt{1+p^2}} \\ \dfrac{r}{r'} = \dfrac{1+p\eta'}{p-\eta'} \end{cases}$$

wo $p = \dfrac{dy}{dx}$, $\eta' = \dfrac{d\eta}{d\xi}$, $r' = \dfrac{dr}{d\vartheta}$ bedeutet.

Wird als Basis die Abscissenachse gewählt, und ist der feste Punkt P Koordinaten-Anfangspunkt, so können die Bestimmungsgleichungen der Roulette auch in folgender Weise hergeleitet werden:

Bei einer neuen Lage der rollenden Kurve habe der Pol die rechtwinkligen Koordinaten x und y (Fig. 3.) und ein beliebiger Punkt A der Erzeugenden möge sich in A^1 befinden; alsdann muss die Strecke OA^1 gleich dem Bogen OA sein, und die im Punkt A an die rollende Kurve in ihrer Anfangslage gezogene Tangente fällt in der neuen Lage mit der Abscissenachse zusammen. Der Winkel φ, den

*) Schlömilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Leipzig. Tl. 2.

diese Tangente mit dem Radius Vektor r bildet, geht bekanntlich hervor aus

$$cotg\,\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}$$

demnach ist:

$$O'C = y = r \,.\, sin\,\varphi = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}}$$

$$OA' = x + r \,.\, cos\,\varphi = x + \frac{r\,\frac{dr}{d\vartheta}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}}$$

andererseits ist der Bogen

$$OA = \int_0^{\vartheta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\; d\vartheta$$

Demnach ergeben sich zur Bestimmung von x und y die Gleichungen:

$$y = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}}$$

$$x + \frac{r \cdot \frac{dr}{d\vartheta}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}} = \int_0^{\vartheta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\; d\vartheta$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen folgt weiter:

$$\frac{dy}{d\vartheta} = r \cdot \frac{dr}{d\vartheta}\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r \cdot \frac{d^2r}{d\vartheta^2}\right] \cdot \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dx}{d\vartheta} = r^2 \cdot \left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r \cdot \frac{d^2r}{d\vartheta^2}\right] \cdot \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{d. h. } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}$$

Setzt man $\frac{dy}{d\vartheta} = p$, so ergiebt sich die Gleichung der

Roulette durch Elimination von r und ϑ aus $F(r, \vartheta) = 0$ und aus den beiden Bestimmungsgleichungen:

$$2) \qquad p = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}, \qquad y = \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}$$

Diese Gleichungen gehen auch aus den Gleichungen 1) dadurch hervor, dass η gleich null gesetzt wird.

Wählt man als Basis die Ordinatenachse, so hat man das Koordinatensystem nur um einen Winkel von 90° zu drehen, d. h. man hat y statt x und $-x$ statt y zu setzen. Die Gleichung der Rollkurve ergiebt sich alsdann durch Elimination von r und ϑ aus $F(r, \vartheta) = 0$ und aus den Gleichungen:

$$3) \qquad p = -r : \frac{dr}{d\vartheta}, \qquad x = \frac{-rp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Diese letzteren Ausdrücke gehen aus den Gleichungen 1) hervor, wenn ξ gleich null gesetzt wird.

Bei der Darstellung der negativen Fusspunktenkurven der Kegelschnitte als Rollkurven soll stets entweder die Abscissenachse oder die Ordinatenachse als Basis gewählt werden.

§ 4. Die negative Fusspunktenkurve der Ellipse als Roulette darzustellen, deren Basis die Abscissenachse ist.

Soll die negative Fusspunktenkurve der Ellipse als Rollkurve dargestellt werden, deren Basis die Abscissenachse ist, so sind die Gleichungen 2) des vorigen Paragraphen zu nehmen, und zwar bedeutet in diesem Falle y die Ordinate der Talbotschen Linie, $p = \frac{dy}{dx} = cotg\ \varphi$, und es muss r als Funktion von ϑ bestimmt werden. Diese Gleichungen 2) gehen über in

$$-cotg\ \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}; \quad \frac{ab \sin\varphi [2b^2 \cos^2\varphi - a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} = r \sin\varphi$$

es ist demnach

$$r = \frac{ab\,[2b^2\cos^2\varphi - a^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{ab\,(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\,[a^2+2\,(a^2-b^2)\cos^2\varphi]}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

Nun ist aber

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} : \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{dr}{d\varphi} : r\,\mathrm{cotg}\,\varphi, \text{ d. h.}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{(a^2-b^2)\sin^2\varphi\,[a^2+2\,(a^2-b^2)\cos^2\varphi]}{[2b^2\cos^2\varphi - a^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}$$

Setzt man in dieser Differentialgleichung $tg\,\varphi = u$, so folgt:

$$\frac{d\vartheta}{du} = -\frac{(a^2-b^2)\,u^2\,(3a^2-2b^2+a^2u^2)}{(1+u^2)\,(b^2+a^2u^2)\,(2b^2-a^2+a^2u^2)}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{3b^2}{b^2+a^2u^2} + \frac{2\,(2b^2-a^2)}{2b^2-a^2+a^2u^2}$$

Ist $a < b\sqrt{2}$, so ergiebt die Integration

$$\vartheta = arctg\,u - \frac{3b}{a}\,arc\,tg\left(\frac{a}{b}u\right) + \frac{2}{a}\sqrt{2b^2-a^2}\,arc\,tg\,\frac{au}{\sqrt{2b^2-a^2}} + C.$$

Wählt man den Scheitelpunkt der grossen Achse als Pol für die rollende Kurve und setzt demgemäss $C = 0$, so werden die Gleichungen der letzteren für den Fall, dass $a < b\sqrt{2}$ ist:

1)
$$r = \frac{ab\,(2b^2-a^2+a^2u^2)\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{3b}{a}\,arc\,tg\left(\frac{a}{b}u\right) + \frac{2}{a}\sqrt{2b^2-a^2}\,arc\,tg\,\frac{au}{\sqrt{2b^2-a^2}}$$

Rollt diese durch die Gleichungen 1) ausgedrückte Kurve längs der Abscissenachse, so beschreibt ihr Pol die Kurve des Talbot.

Für den Fall $a = b\sqrt{2}$ werden die Gleichungen der Erzeugenden

2)
$$r = 2a^2 u^2 (1+u^2)^{\frac{1}{2}} (1+2u^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\vartheta = arc\,tg\, u - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,.\,arc\,tg\,(u\sqrt{2})$$

Ist zunächst $a < b\sqrt{2}$, so wird für $u = 0$ der Radius Vector $r = 2a - \frac{a^3}{b^2}$ und die Anomalie $\vartheta = 0$; wird $u < 0$, so wachsen r und ϑ; für $u = -\infty$ wird $r = b$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2a}.(2b - a - 2\sqrt{2b^2 - a^2})$. Wählt man u positiv, so nimmt r successive dieselben Werte an, die es für $-u$ gehabt hat, während ϑ negativ wird und nur absolut genommen dieselben Werte wie vorher durchläuft.

Der Bogen CD (Fig. 4) der Kurve ist

$$s = \int_0^{-\infty} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta$$

Da nun $dr = \frac{ab\,(a^2-b^2)\,u\,(3a^2-2b^2+a^2u^2)}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{5}{2}}\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}\,du$

und $d\vartheta = -\frac{(a^2-b^2)\,u^2\,(3a^2-2b^2+a^2u^2)}{(b^2+a^2u^2)\,(1+u^2)\,(2b^2-a^2+a^2u^2)}\,du$

so folgt: $\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{ab\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\,(2b^2-a^2+a^2u^2)}{u\,(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} = \frac{ab\,(1+u^2)\,(2b^2-a^2+a^2u^2)}{u\,(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\ \text{demnach}$$

$$s = -ab\,(a^2-b^2)\int_0^{-\infty} \frac{(3a^2-2b^2+a^2u^2)\,u\,du}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= +ab\,(a^2-b^2)\left[\frac{1+u^2}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^{-\infty} = -a + \frac{a^3}{b^2}$$

Da aber $AC = 2a - \frac{a^3}{b^2}$ ist, so ist die Strecke

$$CO = a - AC = -a + \frac{a^3}{b^2} = s$$

d. h. wenn das Stück CD der durch die Gleichungen 1) ausgedrückten Kurve sich auf dem Stück CO der Abscissenachse abrollt, so beschreibt der Pol A den Quadranten AB der negativen Fusspunktenkurve der Ellipse.

Ist $a = b\sqrt{2}$, d. h. gelten die Gleichungen 2) so hat die Kurve im wesentlichen dieselbe Gestalt, doch fällt der Anfangspunkt C der Kurve mit dem Scheitelpunkt A der grossen Achse zusammen, da für $u = 0$ sowohl $\vartheta = 0$ als auch $r = 0$ wird.

Die Gestalt der Kurve ändert sich aber, wenn $a > b\sqrt{2}$ ist; man zerlege in diesem Falle $\frac{d\vartheta}{du}$ in die Partialbrüche:

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{3b^2}{b^2+a^2u^2} + \frac{2(a^2-2b^2)}{(a^2-2b^2)-a^2u^2} \text{ oder}$$

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{3b^2}{b^2+a^2u^2} - \frac{2(a^2-2b^2)}{a^2u^2-(a^2-2b^2)};$$

alsdann ergiebt die Integration:

3) $$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{3b}{a}\,arc\,tg\left(\frac{a}{b}u\right) + \frac{1}{a}\sqrt{a^2-2b^2}\,lg\,\frac{\sqrt{a^2-2b^2}+au}{\sqrt{a^2-2b^2}-au}$$

bzw:

4) $$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{3b}{a}\,arc\,tg\left(\frac{a}{b}u\right) + \frac{1}{a}\sqrt{a^2-2b^2}\,lg\,\frac{au+\sqrt{a^2-2b^2}}{au-\sqrt{a^2-2b^2}}$$

während der Wert für r derselbe bleibt.

Für $u = o$ wird der Radius Vector negativ und zwar gleich $2a - \frac{a^3}{b^2}$, während $\vartheta = 0$ wird. Wird nun u grösser, so wachsen r und auch ϑ, wie die Gleichung 3) ergiebt, beständig; für $u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-2b^2}$ wird $r = 0$ und $\vartheta = \infty$, d. h. die Kurve nähert sich spiralförmig und asymptotisch dem Scheitelpunkt der grossen Achse.

Einen weiteren Zweig der rollenden Kurve liefert die Gleichung 4). Setzt man hierin $u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 2b^2}$, so wird $r = 0$ und $\vartheta = \infty$, wird u noch grösser, so wird r positiv und ϑ nimmt ab; für $u = \infty$ wird schliesslich $r = b$ und $\vartheta = \frac{a - 3b}{a} \cdot \frac{\pi}{2}$. Rollt sich der erste Teil der Kurve, AGF, auf der Abscissenachse ab, so wird dadurch der Zweig FDE der Roulette (Fig. 5.) erzeugt; der zweite Teil unserer Kurve, FIH, liefert den Zweig EC der Roulette.

Der erste Zweig der Erzeugenden besizt einen Wendepunkt. Es ist nämlich $\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} =$

$$\frac{ab(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\,(2b^2 \quad a^2+a^2u^2)[b^2(a^2-2b^2)+a^2(4a^2-7b^2)u^2+a^2(a^2-4b^2)u^4-a^4u^6]}{(a^2-b^2)\,u^4(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}\,(3a^2-2b^2+a^2u^2)}$$

Bekanntlich ist eine Kurve $F(r, \vartheta) = 0$ zum Pol konvex oder konkav, je nachdem der Ausdruck $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r \cdot \frac{d^2 r}{d\vartheta^2}$ kleiner oder grösser als null ist. Dieser Ausdruck wird in unserem Falle gleich

$$\frac{a^2b^2(2b^2-a^2+a^2u^2)^2(1+u^2)}{(a^2-b^2)u^4(b^2+a^2u^2)^3(3a^2-2b^2+a^2u^2)}\Big[-b^2(a^2-2b^2)+(2a^4-3a^2b^2+4b^4)u^2$$
$$+(4a^4-3a^2b^2+2b^4)u^4+a^2(2a^2-b^2)u^6\Big].$$

Er ist negativ, wenn $u^2 < \frac{b^2(a^2-2b^2)}{a^2(2a^2-b^2)}$ ist und positiv, wenn $u^2 > \frac{b^2(a^2-2b^2)}{a^2(2a^2-b^2)}$; die Kurve ist also anfänglich konvex, später konkav.

Für den Wert $u^2 = \frac{b^2(a^2-2b^2)}{a^2(2a^2-b^2)}$ ergiebt sich ein Wendepunkt. Hat sich die Erzeugende bis zu diesem Wendepunkt abgerollt, so hat der Pol, der die Roulette beschreibt, den Punkt D der letzteren erreicht.

§ 5. Die negative Fusspunktenkurve der Ellipse als Roulette darzustellen, deren Basis die Ordinatenachse ist.

Soll die negative Fusspunktenkurve der Ellipse als Rollkurve dargestellt werden, deren Basis die Ordinatenachse ist, so sind die Gleichungen 3) § 3 zu nehmen; in diesen Gleichungen bedeutet x die Abscisse der Talbotschen Linie $p = \frac{dy}{dx} = -\cot g\,\varphi$, während r wieder als Funktion von ϑ bestimmt werden muss.

Diese Gleichungen 3) aus § 3 gehen nun über in:

$$\cot g\,\varphi = r : \frac{dr}{d\vartheta};\quad \frac{ab\cos\varphi\,[2a^2\sin^2\varphi + b^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = r\,.\cos\varphi$$

Es ist demnach

$$r = \frac{ab\,[2a^2\sin^2\varphi + b^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{ab(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\,[b^2 - 2(a^2 - b^2)\sin^2\varphi]}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

und somit wird

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} : \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{d\varphi} : rtg\,\varphi =$$

$$\frac{(a^2 - b^2)\cos^2\varphi\,[b^2 - 2(a^2 - b^2)\sin^2\varphi]}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\,[2a^2\sin^2\varphi + b^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}$$

Setzt man wiederum wie in § 4, $tg\,\varphi = u$, so ergiebt sich:

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 + 3b^2u^2 - 2a^2u^2)}{(1+u^2)(b^2 + a^2u^2)(b^2 + 2a^2u^2 - b^2u^2)}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{3a^2}{b^2 + a^2u^2} + \frac{2(2a^2 - b^2)}{b^2 + (2a^2 - b^2)u^2}$$

Die Integration ergiebt:

$$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{3a}{b}\,arc\,tg\left(\frac{a}{b}u\right) + \frac{2}{b}\sqrt{2a^2 - b^2}\,arc\,tg\left(\frac{u}{b}\sqrt{2a^2 - b^2}\right) + C$$

Die Gleichungen der Erzeugenden sind demnach die folgenden:

$$r = \frac{ab(2a^2u^2 - b^2u^2 + b^2)(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vartheta = arctg\, u - \frac{3a}{b}\, arc\, tg\left(\frac{a}{b}u\right) + \frac{2}{b}\sqrt{2a^2-b^2}\, arc\, tg\left(\frac{u}{b}\sqrt{2a^2-b^2}\right) + C$$

Als Pol werde der obere Scheitel der kleinen Achse gewählt; die Anfangslage der Kurve sei so bestimmt, dass $C = \pi\left(1 + \frac{3a}{2b} - \frac{1}{b}\sqrt{2a^2-b^2}\right)$ ist.

Ist zunächst $a \leq b\sqrt{\frac{3}{2}}$, so wachsen r und ϑ kontinuierlich, wenn u wächst; für $u = 0$ wird $r = a$,

$$\vartheta = \pi\left(1 + \frac{3a}{2b} - \frac{1}{b}\sqrt{2a^2-b^2}\right)$$

wird u grösser, so werden auch r und ϑ grösser; für $u = \infty$ wird $r = 2b - \frac{b^3}{a^2}$, $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$. (Fig. 6.)

Die Länge des betrachteten Kurvenstücks DC ist

$$s = \int_0^\infty \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta$$

$$\frac{dr}{d\vartheta} \text{ ist } = \frac{dr}{du} : \frac{d\vartheta}{du} = \frac{ab\,u\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\,(b+2a^2u^2-b^2u^2)}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und es wird

$$s = ab\,(a^2-b^2)\int_0^\infty \frac{(b^2+3b^2u^2-2a^2u^2)\,du}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= ab\,(a^2-b^2)\left[\frac{u\,(1+u^2)}{(b^2+a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^\infty = b - \frac{b^3}{a^2}$$

Da nun $BC = 2b - \frac{b^3}{a^2}$ und $BO = b$ ist, so ist $OC = b - \frac{b^3}{a^2} = s$; es rollt sich demnach die Kurve CD auf dem Stück

CO der Ordinatenachse ab, und inzwischen beschreibt der Pol B den Quadranten BF der Roulette.

Ist $a > b\sqrt{\frac{3}{2}}$, so können $\frac{dr}{du}$ und $\frac{d\vartheta}{du}$ verschwinden, nämlich für den Wert $u = \frac{b}{\sqrt{2a^2 - 3b^2}}$. Für $u = 0$ wird auch in diesem Falle $r = a$ und $\vartheta = \pi\left(1 + \frac{3a}{2b} - \frac{1}{b}\sqrt{2a^2 - b^2}\right)$; wächst nun u, so wachsen auch r und ϑ und zwar so lange, bis u den Wert $\frac{b}{\sqrt{2a^2 - 3b^2}}$ annimmt; für diesen Wert wird $r = \frac{4}{9}a\sqrt{6}$; wird u nun noch grösser, so nehmen r und ϑ wieder ab; für $u = \infty$ wird $r = 2b - \frac{b^3}{a^2}$, $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$. So lange als $u < \frac{b}{\sqrt{2a^2 - 3b^2}}$ ist, bleibt die Kurve konvex zur Hauptachse; wird $u > \frac{b}{\sqrt{2a^2 - 3b^2}}$ so wird sie konkav. (Fig. 7).

Der zwischen den Worten $r = a$ und $r = \frac{4}{9}a\sqrt{6}$ liegende Teil FG der Erzeugenden ist

$$s_1 = ab\,(a^2 - b^2)\left[\frac{u\,(1+u^2)}{(b^2 + a^2\,u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^{\frac{b}{\sqrt{2a^2-3b^2}}} = \frac{2a}{9b}\sqrt{3\,(a^2 - b^2)}$$

und der zwischen $r = \frac{4}{9}a\sqrt{6}$ und $r = 2b - \frac{b^3}{a^2}$ liegende Bogen GH ist

$$s_2 = ab\,(a^2 - b^2)\left[\frac{u\,(1+u^2)}{(b^2 + a^2\,u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{\infty}^{\frac{b}{\sqrt{2a^2-3b^2}}} =$$

$$\frac{2a}{9b}\sqrt{3\,(a^2 - b^2)} - b + \frac{b^3}{a^2}$$

also $s_1 - s_2 = b - \frac{b^3}{a^2}$, d. h. $= OH$.

Es rollt sich zuerst der Bogen HG ab, während dessen beschreibt der Pol B die Roulette BE, dann rollt sich der Bogen GF ab, und es wird während dessen von dem Pol der Bogen EC der Roulette beschrieben. Sobald der Punkt F den Punkt O erreicht hat, hat der Pol B den Punkt C erreicht.

§ 6. Die negative Fusspunktenkurve der Hyperbel als Roulette darzustellen, deren Basis die Abscissenachse ist.

Zur Bestimmung der rollenden Kurve dienen wieder die Gleichungen 2) aus § 3.

Da $p = \frac{dy}{dx} = -\,cotg\,\varphi$ ist, so ergiebt sich:

$$-\,cotg\,\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\vartheta};\quad \frac{ab\,sin\,\varphi\,[2b^2cos^2\varphi + a^2(cos^2\varphi - sin^2\varphi)]}{(b^2\,cos^2\varphi - a^2\,sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = r\,sin\,\varphi$$

demnach ist

$$r = \frac{ab\,[2b^2\,cos^2\varphi + a^2\,(cos^2\varphi - sin^2\varphi)]}{(b^2\,cos^2\varphi - a^2\,sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

daraus folgt

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{ab\,(a^2+b^2)\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,[a^2+2\,(a^2+b^2)\,cos^2\varphi]}{(b^2\,cos^2\varphi - a^2\,sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

und da nun $\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} : \frac{dr}{d\vartheta} = -\,\frac{dr}{d\varphi} : r.\,cotg\,\varphi$ ist,

so folgt $\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\,\frac{(a^2+b^2)\,sin^2\varphi\,[a^2+2\,(a^2+b^2)\,cos^2\varphi)}{[2b^2cos^2\varphi + a^2(cos^2\varphi - sin^2\varphi)]\,(b^2cos^2\varphi - a^2sin^2\varphi)}$

Setzt man wieder $tg\,\varphi = u$, so wird

$$\frac{d\vartheta}{du} = -\,\frac{(a^2+b^2)\,u^2\,(3a^2+2b^2+a^2u^2)}{(1+u^2)\,(b^2-a^2u^2)\,(2b^2+a^2-a^2u^2)}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{3b^2}{b^2-a^2u^2} + \frac{2(a^2+2b^2)}{a^2+2b^2-a^2u^2}$$

Die Integration ergiebt:

$$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{3b}{2a}\,lg\,\frac{b+au}{b-au} + \frac{1}{a}\sqrt{a^2+2b^2}\,lg\,\frac{\sqrt{a^2+2b^2}+au}{\sqrt{a^2+2b^2}-au}$$

Setzt man auch in dem Ausdruck für $r\ tg\varphi = u$, so ergeben sich die Gleichungen der rollenden Kurve:

$$r = \frac{ab\,(2b^2 + a^2 - a^2u^2)\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2 - a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1)

$$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{3b}{2a}\,lg\,\frac{b+au}{b-au} + \frac{1}{a}\sqrt{a^2+2b^2}\,lg\,\frac{\sqrt{a^2+2b^2}+au}{\sqrt{a^2+2b^2}-au}$$

Die Integrationskonstante ist gleich null zu setzen, wenn man den Scheitelpunkt A (Fig. 8) der Hauptachse zum Pol und diese selbst zur Polarachse wählt.

Für $u = 0$ wird $r = 2a + \frac{a^3}{b^2}$ und $\vartheta = 0$; wird u negativ, so wachsen r und ϑ, ersteres schnell, letzteres langsam, beide aber kontinuierlich; für $u = -\frac{b}{a}$ wird $r = \infty$ und $\vartheta = \infty$. Wird u seinem absoluten Werte nach noch grösser, so werden r und ϑ imaginär. Die Kurve windet sich in immer grösser werdenden Windungen spiralförmig um den Pol. Für positive Werte des Parameters u ergiebt sich ein unterhalb der Hauptachse liegender Zweig der Erzeugenden, der dem oberen symmetrisch ist. Ist die Hyperbel eine gleichseitige, d. h. ist $b = a$, so werden die Gleichungen der rollenden Kurve:

$$r = a\,(3-u^2)\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1-u^2)^{-\frac{3}{2}}$$

2)

$$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{3}{2}\,lg\,\frac{1+u}{1-u} + \sqrt{3}\,lg\,\frac{\sqrt{3}+u}{\sqrt{3}-u}.$$

§ 7. Die negative Fusspunktenkurve der Hyperbel als Roulette darzustellen, deren Basis die Ordinatenachse ist.

Wählt man als Basis die Ordinatenachse, so gelten wieder die Gleichungen 3) des § 3.

Da $p = -cotg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$, so ergiebt sich:

$$cotg\,\varphi = r : \frac{dr}{d\vartheta};\ -\frac{ab\cos\varphi\,[2a^2\sin^2\varphi - b^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = r.\cos\varphi$$

Demnach wird $r = -\dfrac{ab\,[2a^2 \sin^2\varphi - b^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]}{(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

und $\dfrac{dr}{d\varphi} = -\dfrac{ab(a^2+b^2)\,\sin\varphi\cos\varphi\,[b^2+2\,(a^2+b^2)\sin^2\varphi)]}{(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$

und da $\dfrac{d\vartheta}{d\varphi} = \dfrac{dr}{d\varphi} : \dfrac{dr}{d\vartheta} = \dfrac{dr}{d\varphi} : r\,tg\varphi$

ist, so folgt:

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{(a^2+b^2)\cos^2\varphi\,[b^2+2\,(a^2+b^2)\sin^2\varphi]}{[2a^2\sin^2\varphi - b^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]\,(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)}$$

Wird wiederum $tg\,\varphi = u$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{(a^2+b^2)\,(b^2+2a^2u^2+3b^2u^2)}{(1+u^2)\,(b^2-a^2u^2)\,(2a^2u^2+b^2u^2-b^2)}$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf zwei Weisen in Partialbrüche zerlegen, entweder

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{1+u^2} + \frac{3a^2}{b^2-a^2u^2} - \frac{2\,(2a^2+b^2)}{b^2-(2a^2+b^2)\,u^2} \text{ oder:}$$

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{1+u^2} + \frac{3a^2}{b^2-a^2u^2} + \frac{2\,(2a^2+b^2)}{(2a^2+b^2)\,u^2-b^2}$$

Die Integration dieser beiden Ausdrücke ergiebt bzw:

$$\vartheta = arc\,tg\,u + \frac{3a}{2b}\,lg\,\frac{b+au}{b-au} - \frac{1}{b}\sqrt{2a^2+b^2}\,lg\,\frac{b+u\sqrt{2a^2+b^2}}{b-u\sqrt{2a^2+b^2}}$$

$$\vartheta = arc\,tg\,u + \frac{3a}{2b}\,lg\,\frac{b+au}{b-au} - \frac{1}{b}\sqrt{2a^2+b^2}\,lg\,\frac{u\sqrt{2a^2+b^2}+b}{u\sqrt{2a^2+b^2}-b}$$

Setzt man noch in dem Ausdruck für $r\ tg\varphi = u$, so ergeben sich die Gleichungen der rollenden Kurve:

1)
$$\begin{cases} r = \dfrac{ab\,(b^2-2a^2u^2-b^2u^2)\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2-a^2u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \vartheta = arc\,tg\,u + \dfrac{3a}{2b}\,lg\,\dfrac{b+au}{b-au} - \dfrac{1}{b}\sqrt{2a^2+b^2}\,lg\,\dfrac{b+u\sqrt{2a^2+b^2}}{b-u\sqrt{2a^2+b^2}} \\ \vartheta = arc\,tg\,u + \dfrac{3a}{2b}\,lg\,\dfrac{b+au}{b-au} - \dfrac{1}{b}\sqrt{2a^2+b^2}\,lg\,\dfrac{u\sqrt{2a^2+b^2}+b}{u\sqrt{2a^2+b^2}-b}. \end{cases}$$

Der Durchschnittspunkt der Roulette mit der Ordinatenachse werde als Pol gewählt, und die Anfangslage der rollenden Kurve sei so gewählt, dass die Integrationskonstante verschwindet. Den ersteren der für ϑ gefundenen Werte nimmt man, wenn $u < \frac{b}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$ den anderen, wenn $u > \frac{b}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$ ist.

Für eine gleichseitige Hyperbel nehmen die Gleichungen 1) die einfachere Gestalt an:

$$2)\begin{cases} r = a\,(1 - 3u^2)\,(1 + u^2)^{\frac{1}{2}}\;\;(1 - u^2)^{-3/2} \\ \vartheta = arc\,tg\,u + {}^3/_2\,lg\,\dfrac{1+u}{1-u} - \sqrt{3}\,.\,lg\,\dfrac{1+u\sqrt{3}}{1-u\sqrt{3}} \\ \vartheta = arc\,tg\,u + {}^3/_2\,lg\,\dfrac{1+u}{1-u} - \sqrt{3}\,.\,lg\,\dfrac{u\sqrt{3}+1}{u\sqrt{3}-1} \end{cases}$$

Um alle Zweige der Kurve zu bekommen, müssen auch negative Radii Vektoren und negative Anomalien zugelassen werden. Für $u = 0$ wird $r = a$ und $\vartheta = 0$; wird u grösser, so nehmen r und ϑ ab; für $u = \frac{b}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$ wird $r = 0$, $\vartheta = -\infty$.

Wird u noch grösser als $\frac{b}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$, so wird r negativ und ϑ fängt wieder an zu wachsen. Von einem gewissen Werte des Parameters u an, der bei dem Fall der gleichseitigen Hyperbel etwa gleich 0,74 ist, geht ϑ ins Positive über; für $u = \frac{b}{a}$ wird $r = -\infty$, $\vartheta = +\infty$.

Ein noch grösserer Wert von u würde r und ϑ imaginär machen. (Fig. 9.)

Da $\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{du} : \frac{d\vartheta}{du} = -\frac{ab\,u\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\;(2a^2u^2 + b^2u^2 - b^2)}{(b^2 - a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}$,

so wird der Bogen des ersten Zweiges $C\,D$ der Erzeugenden:

$$s = \int_0^{-\infty} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta$$

$$= ab\,(a^2+b^2)\int_0^{\frac{b}{\sqrt{2a^2+b^2}}} \frac{(2a^2u^2+3b^2u^2+b^2)\,du}{(b^2-a^2u^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= ab\,(a^2+b^2)\left[\frac{u(1+u^2)}{(b^2-a^2u^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^{\frac{b}{\sqrt{2a^2+b^2}}} = \frac{2a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$$

d. h. gleich der Strecke CO.

Während sich der erste zwischen den Werten $u=0$ und $u=\frac{b}{\sqrt{2a^2+b^2}}$ liegende Teil der rollenden Kurve auf CO abrollt, beschreibt der Pol C den Bogen CB der Roulette. Durch das Rollen des zweiten zwischen den Werten $u=\frac{b}{\sqrt{2a^2+b^2}}$ und $u=\infty$ liegenden Teils wird der sich ins Unendliche erstreckende Bogen CF' der Roulette erzeugt.

Beide Zweige der Erzeugenden nähern sich spiralförmig und asymptotisch dem Pol C; der letztere Zweig verläuft dann, ebenfalls spiralförmig bis ins Unendliche.

§ 8. Die negative Fusspunktenkurve der Parabel als Roulette darzustellen, deren Basis die Abscissenachse ist.

Die Gleichungen der negativen Fusspunktenkurve der Parabel waren nach § 1

$$x = \frac{2a\,(3-2\sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi},\ y = -4a\,\mathrm{cotg}^3\varphi,\ \frac{dy}{dx} = -\mathrm{cotg}\,\varphi.$$

Bezeichnet man also wieder die Polarkoordinaten der rollenden Kurve mit r und ϑ, so hat man, bezugnehmend auf die Gleichungen 2) § 3:

$$-\mathrm{cotg}\,\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\vartheta};\ -4a\,\mathrm{cotg}^3\varphi = r.\sin\varphi,$$

woraus sich ergiebt $r = -\frac{4a\cos^3\varphi}{\sin^4\varphi}$.

Daraus folgt $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{4a \cos^2 \varphi (3 + \cos^2 \varphi)}{\sin^5 \varphi}$

Da nun $\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} : \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{dr}{d\varphi} : r \cot g \varphi$ ist, so folgt:

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{3}{\cos^2 \varphi} + 1,$$

also

$$\vartheta = 3. tg \varphi + \varphi + Const.$$

Setzt man $tg \varphi = u$, so werden mithin die Gleichungen der rollenden Kurve

$$1) \quad \begin{aligned} r &= -\frac{4a}{u^4}\sqrt{1+u^2} \\ \vartheta &= 3u + arc\, tg\, u + C. \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt der Roulette werde als Pol gewählt und dementsprechend $C = 0$ gesetzt. Nimmt man r positiv an, so folgt, dass für $u = 0$ $r = \infty$ und $\vartheta = 0$ wird. Wird nun u grösser, so nimmt r zuerst langsam, dann aber schnell ab, während ϑ fortwährend zunimmt; für $u = \infty$ wird $r = 0$ und $\vartheta = \infty$, d. h. die Kurve windet sich spiralförmig um den Scheitelpunkt der Roulette und nähert sich demselben asymptotisch. Bezeichnet man die auf den Scheitel der Roulette als Anfangspunkt bezogenen rechtwinkeligen Koordinaten der rollenden Kurve mit ξ und η und setzt demgemäss $\xi = r. \cos \vartheta$, $\eta = r. \sin \vartheta$, so folgt:

$$\xi = \frac{4a}{u^4}\sqrt{1+u^2}\, \cos(3u + arc\, tg\, u)$$

$$\eta = \frac{4a}{u^4}\sqrt{1+u^2}\, \sin(3u + arc\, tg\, u).$$

Die Gleichungen der rollenden Kurve können somit auch geschrieben werden:

$$2) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{4a}{u^4}(\cos 3u - u\,.\,\sin 3u) \\ \eta &= \frac{4a}{u^4}(\sin 3u + u \cos 3u) \end{aligned}$$

Die ξ-Achse ist hierbei identisch mit der Abcissenachse der Roulette, die η-Achse ist um $2a$ von der Ordinatenachse der Roulette entfernt. (Fig. 10.)

§ 9. Die negative Fusspunktenkurve der Parabel als Roulette darzustellen, deren Basis die Scheitelsenkrechte ist.

Unter Scheitelsenkrechte der negativen Fusspunktenkurve der Parabel soll im Folgenden das im Scheitel der Fusspunktenkurve auf der Abscissenachse errichtete Lot verstanden werden. Macht man dieselbe zur Ordinatenachse, so ist $x - 2a$ statt x zu setzen; die Gleichungen der negativen Fusspunktenkurve sind alsdann $x = 6a\ cotg^2\varphi$, $y = -4a\ cotg^3\varphi$; $\frac{dy}{dx} = -cotg\varphi$. Die Bestimmungsgleichungen für die rollende Kurve werden also:

$$cotg\varphi = r : \frac{dr}{d\vartheta};\ 6a\ cotg^2\varphi = r\ .\ cos\varphi$$

woraus sich ergiebt $$r = \frac{6a\ .\ cos\varphi}{sin^2\varphi}$$

und es folgt ferner $$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{6a\,(1+cos^2\varphi)}{sin^3\varphi}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} \text{ ist } = \frac{dr}{d\varphi} : \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{d\varphi} : rtg\,\varphi$$

$$= -\frac{1}{sin^2\varphi} - cotg^2\varphi$$

Die Integration ergiebt

$$\vartheta = -\varphi - 2cotg\,\varphi + Const.$$

Wählt man als Anfangslage der rollenden Kurve diejenige, bei der $Const. = \pi$ ist und setzt $cotg\,\varphi = -u$, so ergeben sich die Gleichungen der Erzeugenden:

1)
$$r = 6a\,u\,\sqrt{1+u^2}$$
$$\vartheta = 2u + arc\,tg\,u + \pi$$

Für $u = 0$ wird $r = 0$ und $\vartheta = {}^3/_2\,\pi$; wächst u, so wachsen

auch r und ϑ und zwar beide kontinuierlich; für $u = \infty$ wird $r = \infty$ und $\vartheta = \infty$. (Fig. 11.)

Sind ξ und η die rechtwinkeligen Koordinaten der rollenden Kurve, so ist

$$\xi = r \,.\, cos\,\vartheta, \quad \eta = r \,.\, sin\,\vartheta, \quad \text{oder:}$$

$$\xi = -\,6a\,u\sqrt{1+u^2}\,cos\,(2u + arc\,cotg\,u)$$

$$\eta = -\,6a\,u\sqrt{1+u^2}\,sin\,(2u + arc\,cotg\,u), \text{ d. h.}$$

$$2) \qquad \begin{aligned} \xi &= -\,6a\,u\,(u\,cos\,2u - sin\,2u) \\ \eta &= -\,6a\,u\,(u\,sin\,2u + cos\,2u) \end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Durchschnittspunkte der Erzeugenden mit der Abscissenachse aus $cotg\,2u = -\,u$ und mit der Ordinatenachse aus $tg\,2u = u$ hervorgehen.

§ 10. Die negative Scheitel-Fusspunktenkurve der Ellipse als Roulette darzustellen, deren Basis die Abscissenachse ist.

Die Gleichungen der negativen Scheitel-Fusspunktenkurve der Ellipse sind nach § 2:

$$x = 2a\,(1-\beta)\,.\,\frac{cos^2\varphi\,(3\,sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)}{(sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)^2}$$

$$y = -\,4a\,(1-\beta)\,.\,\frac{sin\,\varphi\,cos^3\varphi}{(sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)^2}$$

Die Bestimmungsgleichungen der rollenden Kurve ergeben sich somit nach § 3. 2):

$$-\,cotg\,\varphi = \frac{1}{r}\,.\,\frac{dr}{d\vartheta};\quad -\,4\,a\,(1-\beta)\,.\,\frac{sin\,\varphi\,cos^3\varphi}{(sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)^2} = r\,.\,sin\,\varphi$$

Daraus folgt: $$r = \frac{-\,4a\,(1-\beta)\,cos^3\varphi}{(sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)^2}$$

oder, falls $tg\,\varphi = u$ gesetzt wird:

$$r = -\,4a\,(1-\beta)\,.\,\frac{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2+\beta)^2}$$

Hiernach wird $$\frac{dr}{du} = 4a\,(1-\beta)\,.\,\frac{u\,(3u^2+4-\beta)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\,(u^2+\beta)^3}$$

und $$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{dr}{du} : \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{dr}{du} : \frac{r}{u}$$

$$= \frac{u^2(3u^2+4-\beta)}{(1+u^2)(\beta+u^2)}$$

$$= 3 + \frac{1}{1+u^2} - \frac{4\beta}{\beta+u^2}, \text{ also}$$

$$\vartheta = 3u + arc\,tg\,u - 4\sqrt{\beta}\,.\,arc\,tg\left(\frac{u}{\sqrt{\beta}}\right) + Const.$$

Wählt man den Punkt $x = \frac{2a}{\beta} - 2a,\ y = 0$ der Roulette als Pol der rollenden Kurve und setzt $Const = \pi$, so ergeben sich demnach, wenn r positiv genommen wird

$$r = 4a(1-\beta)\,.\,\frac{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2+\beta)^2}$$

$$\vartheta = 3u + arc\,tg\,u - 4\sqrt{\beta}\,.\,arc\,tg\left(\frac{u}{\sqrt{\beta}}\right) + \pi$$

als Gleichungen der Erzeugenden. Für $u = 0$ wird $r = \frac{4a}{\beta^2}\,.\,(1-\beta)$ und $\vartheta = \pi$. Wird u grösser, so nimmt r zuerst schneller, dann aber langsamer ab, während ϑ beständig wächst. Für $u = \infty$ wird $r = 0$ und $\vartheta = \infty$, d. h. die Kurve nähert sich asymptotisch dem Anfangspunkt. (Fig. 12.)

Die Kurve besitzt einen Wendepunkt.

Da nämlich $$\frac{d^2r}{d\vartheta^2} = \frac{d}{du}\frac{dr}{d\vartheta} : \frac{d\vartheta}{du}$$

$$= \frac{-4a(1-\beta)(4u^4+5u^2+\beta)(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{u^4(u^2+\beta)^2(3u^2+4-\beta)}$$

so wird $$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r\,.\,\frac{d^2r}{d^2\vartheta} =$$

$$16a^2(1-\beta)^2\,.\,\frac{(u^2+1)[3u^6+(6-\beta)u^4+(3-2\beta)u^2-\beta]}{u^4(3u^2+4-\beta)(u^2+\beta)^4}$$

Dieser Ausdruck ist negativ, wenn $u < \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ und positiv, wenn

$u > \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ ist; für $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ wird er gleich null. Die Kurve ist also für alle Werte von $u = 0$ bis $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ konvex; der Wert $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ liefert einen Wendepunkt; von ihm ab ist die Kurve konkav nach dem Anfangspunkt.

Es rollt sich zuerst der Teil DE der Kurve, welcher zwischen den Werten $u = 0$ und $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ liegt, ab; inzwischen beschreibt der Pol O den Bogen OA der Roulette; alsdann rollt sich der zwischen den Werten $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ und $u = \infty$ liegende Zweig DO ab, und es wird während dessen der Bogen AC der Roulette beschrieben.

§ 11. Die negative Scheitel-Fusspunktenkurve der Ellipse als Roulette darzustellen, deren Basis die Ordinatenachse ist.

Die Bestimmungsgleichungen der Erzeugenden werden nach § 3. 3):

$$cotg\,\varphi = r : \frac{dr}{d\vartheta};\quad 2a(1-\beta).\ \frac{cos^2\varphi\,(3\,sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)}{(sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)^2} = r\,.\,cos\,\varphi$$

woraus sich ergiebt:

$$r = 2a(1-\beta).\ \frac{cos\,\varphi\,(3\,sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)}{(sin^2\varphi + \beta\,cos^2\varphi)^2}$$

oder, falls $tg\,\varphi = u$ gesetzt wird:

$$r = 2a(1-\beta).\ \frac{(3u^2+\beta)(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2+\beta)^2}$$

Durch Differentiation dieses Ausdrucks folgt:

$$\frac{dr}{du} = -2a(1-\beta).\ \frac{u\,[3u^4 + 6(1-\beta)u^2 - \beta(2+\beta)]}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\ (u^2+\beta)^3}$$

Nun ist

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{dr}{du} : \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{du} : r\,u$$

$$= -\frac{3u^4 + 6(1-\beta)u^2 - \beta(2+\beta)}{(1+u^2)(u^2+\beta)(3u^2+\beta)}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{4}{u^2+\beta} + \frac{6}{3u^2+\beta}, \text{ also:}$$

$$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{4}{\sqrt{\beta}}\,arc\,tg\,\frac{u}{\sqrt{\beta}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}}\,arc\,tg\,\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}} + Const.$$

Als Pol der rollenden Kurve sei der Punkt P, $x = \frac{2a}{\beta} - 2a$, $y = 0$ gewählt; *Const.* sei gleich π; alsdann werden die Gleichungen der Erzeugenden

$$r = 2a(1-\beta)\,\frac{(3u^2+\beta)(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2+\beta)^2}$$

$$\vartheta = arc\,tg\,u - \frac{4}{\sqrt{\beta}}\,arc\,tg\,\frac{u}{\sqrt{\beta}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}}\,arc\,tg\,\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}} + \pi.$$

Für $u = 0$ wird $r = \frac{2a}{\beta} - 2a$ und $\vartheta = \pi$ (Punkt O der Fig. 13). Wird u grösser, so werden auch r und ϑ grösser ersteres langsam, letzteres schnell. Die Maximalwerte von r und ϑ ergeben sich dadurch, dass man $\frac{dr}{du}$ bezw. $\frac{d\vartheta}{du}$ gleich null setzt; man erhält dadurch

$$u = \sqrt{-1 + \beta + \sqrt{1/3}\,(3 - 4\beta + 4\beta^2)}$$

Wächst u noch über diesen Wert hinaus, so nehmen r und ϑ wieder ab; für $u = \infty$ wird $r = 0$, $\vartheta = \pi\left(\frac{3}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{\beta}\right)$. Wählt man u negativ, so ergiebt sich ein dem ersten kongruenter Zweig der rollenden Kurve, so dass die letztere zur Abscissenachse symmetrisch liegt.

Rollt sich der Bogen $O\,D$ der Erzeugenden auf der Ordinatenachse ab, so beschreibt der Punkt P den Zweig PB

der negativen Fusspunktenkurve; rollt sich dann weiter der Bogen *DEP* ab, so wird der Zweig *BO* der Roulette erzeugt.

§ 12. Die negative Scheitel-Fusspunktenkurve der Hyperbel als Roulette darzustellen, deren Basis die Abscissenachse ist.

Die Gleichungen der negativen Scheitel-Fusspunktenkurve der Hyperbel sind nach § 2:

$$x = 2a(1+\beta) \cdot \frac{\cos^2\varphi\,(3\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)}{(\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)^2}$$

$$y = -4a(1+\beta) \cdot \frac{\sin\varphi\cos^3\varphi}{(\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)^2}$$

Ist die Abscissenachse die Basis, so werden die Bestimmungsgleichungen für die rollende Kurve:

$$-\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\vartheta};\quad -4a(1+\beta)\cdot\frac{\sin\varphi\cos^3\varphi}{(\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)^2} = r\cdot\sin\varphi$$

Daraus ergiebt sich $r = -4a(1+\beta)\cdot\dfrac{\cos^3\varphi}{(\sin^2\varphi - \beta\cos^2\varphi)}$

oder, falls $\operatorname{tg}\varphi = u$ gesetzt wird:

$$r = \frac{-4a(1+\beta)(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2-\beta)^2}$$

Durch Differentiation dieses Ausdrucks folgt:

$$\frac{dr}{du} = 4a(1+\beta)\cdot\frac{u(3u^2+4+\beta)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\,(u^2-\beta)^3}$$

und somit wird

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{dr}{du} : \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{dr}{du} : \frac{r}{u} = \frac{u^2(3u^2+4+\beta)}{(1+u^2)(u^2-\beta)}$$

$\dfrac{d\vartheta}{du}$ lässt sich auf zwei Weisen in Partialbrüche zerlegen, entweder

$$\frac{d\vartheta}{du} = 3 + \frac{1}{1+u^2} - \frac{4\beta}{\beta - u^2}$$ oder:

$$\frac{d\vartheta}{du} = 3 + \frac{1}{1+u^2} + \frac{4\beta}{u^2-\beta}$$

Es ist folglich entweder

$$\vartheta = 3u + arc\,tg\,u + 2\sqrt{\beta}\,.\,lg\,\frac{\sqrt{\beta}-u}{\sqrt{\beta}+u} + Const.\ \text{oder:}$$

$$\vartheta = 3u + arc\,tg\,u + 2\sqrt{\beta}\,.\,lg\,\frac{u-\sqrt{\beta}}{u+\sqrt{\beta}} + Const.$$

Man wähle den Punkt $x = -\frac{2a}{\beta} - 2a, y = 0$ der Roulette als Pol der rollenden Kurve, r werde positiv genommen und die Integrationskonstante gleich π gesetzt. Alsdann werden die Gleichungen der Erzeugenden die folgenden:

$$1).\begin{cases} r = \dfrac{4a\,(1+\beta)\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2-\beta)^2} \\ \vartheta = 3u + arc\,tg\,u + 2\sqrt{\beta}\,.\,lg\,\dfrac{\sqrt{\beta}-u}{\sqrt{\beta}+u} + \pi \\ \vartheta = 3u + arc\,tg\,u + 2\sqrt{\beta}\,.\,lg\,\dfrac{u-\sqrt{\beta}}{u+\sqrt{\beta}} + \pi \end{cases}$$

Der erstere dieser beiden für ϑ gefundenen Ausdrücke ist für alle Werte von u zu nehmen, die zwischen 0 und $\sqrt{\beta}$ liegen; wird $u > \sqrt{\beta}$, so ist der andere Ausdruck von ϑ zu wählen. (Fig. 14).

Ist $u = 0$, so ist $r = \frac{4a}{\beta^2}(1+\beta)$, $\vartheta = \pi$ (Punkt A). Wird u grösser, so wird auch r grösser, während ϑ abnimmt; für $u = \sqrt{\beta}$ wird $r = \infty$ und $\vartheta = -\infty$. Wächst u noch über $\sqrt{\beta}$ hinaus, so wird r wieder kleiner; auch der absolute Wert von ϑ nimmt ab, er erreicht schliesslich den Wert null, geht durch denselben hindurch und wächst dann bis ins Unendliche; für $u = \infty$ wird $r = 0$ und $\vartheta = \infty$, d. h. die Kurve windet sich spiralförmig um den Pol und nähert sich demselben asymptotisch.

Rollt sich der erste Zweig AB . . . auf der Abscissenachse ab, so beschreibt der Pol P inzwischen den Bogen PH . . .

der Roulette; im Anschluss an den Zweig $AB \ldots$ rollt sich alsdann der Zweig $EDCP$ ab; dadurch wird der Bogen GO der Roulette erzeugt.

§ 13. Die negative Scheitel-Fusspunktenkurve der Hyperbel als Roulette darzustellen, deren Basis die Ordinatenachse ist.

Die Bestimmungsgleichungen für die rollende Kurve sind

$$cotg\,\varphi = r : \frac{dr}{d\vartheta};\quad 2a\,(1+\beta)\,.\,\frac{cos^2\varphi\,(3\,sin^2\varphi - \beta\,cos^2\varphi)}{(sin^2\varphi - \beta\,cos^2\varphi)^2} = r\,cos\,\varphi$$

Es wird hiernach

$$r = 2a\,(1+\beta)\,.\,\frac{cos\,\varphi\,(3\,sin^2\varphi - \beta\,cos^2\varphi)}{(sin^2\varphi - \beta\,cos^2\varphi)^2}$$

oder, falls $tg\,\varphi = u$ gesetzt wird.

$$r = 2a\,(1+\beta)\,.\,\frac{(3u^2-\beta)\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2-\beta)^2}$$

Daraus ergiebt sich:

$$\frac{dr}{du} = -\,2a\,(1+\beta)\,.\,\frac{u\,[3u^4 + 6\,(1+\beta)\,u^2 + \beta\,(2-\beta)]}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\,(u^2-\beta)^3}$$

Da nun $\frac{d\vartheta}{du} = \frac{dr}{du} : \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{du} : ru$ ist, so folgt:

$$\frac{d\vartheta}{du} = -\,\frac{3u^4 + 6\,(1+\beta)\,u^2 + \beta\,(2-\beta)}{(1+u^2)\,(u^2-\beta)\,(3u^2-\beta)}$$

Dieser Ausdruck werde auf drei Arten in Partialbrüche zerlegt; nämlich

1) $$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{1+u^2} + \frac{4}{\beta - u^2} - \frac{6}{\beta - 3u^2}$$

2) $$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{1+u^2} + \frac{4}{\beta - u^2} + \frac{6}{3u^2 - \beta}$$

3) $$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{4}{u^2 - \beta} + \frac{6}{3u^2 - \beta}$$

Die Integration dieser drei Differentialgleichungen ergiebt bezw.

$$\vartheta = arc\,tg\,u + \frac{2}{\sqrt{\beta}}\,lg\frac{\sqrt{\beta}+u}{\sqrt{\beta}-u} - \sqrt[3]{\frac{3}{\beta}}\,lg\frac{\sqrt{\beta}+u\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}-u\sqrt{3}} + Const.$$

$$\vartheta = arc\,tg\,u + \frac{2}{\sqrt{\beta}}\,lg\frac{\sqrt{\beta}+u}{\sqrt{\beta}-u} - \sqrt[3]{\frac{3}{\beta}}\,lg\frac{u\sqrt{3}+\sqrt{\beta}}{u\sqrt{3}-\sqrt{\beta}} + Const.$$

$$\vartheta = arc\,tg\,u + \frac{2}{\sqrt{\beta}}\,lg\frac{u+\sqrt{\beta}}{u-\sqrt{\beta}} - \sqrt[3]{\frac{3}{\beta}}\,lg\frac{u\sqrt{3}+\sqrt{\beta}}{u\sqrt{3}-\sqrt{\beta}} + Const.$$

Als Pol für die rollende Kurve sei der Punkt P (Fig. 15) gewählt, in welchem die negative Scheitel-Fusspunktenkurve der Hyperbel die negative Abscissenachse schneidet.

Setzt man die Integrationskonstante gleich π, so werden mithin die Gleichungen der Erzeugenden:

$$4) \qquad r = 2a\,(1+\beta)\,.\,\frac{(3u^2-\beta)\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2-\beta)^2}$$

$$5)\begin{cases} \vartheta = arc\,tg\,u + \dfrac{2}{\sqrt{\beta}}\,lg\dfrac{\sqrt{\beta}+u}{\sqrt{\beta}-u} - \sqrt[3]{\dfrac{3}{\beta}}\,lg\dfrac{\sqrt{\beta}+u\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}-u\sqrt{3}} + \pi \\ \vartheta = arc\,tg\,u + \dfrac{2}{\sqrt{\beta}}\,lg\dfrac{\sqrt{\beta}+u}{\sqrt{\beta}-u} - \sqrt[3]{\dfrac{3}{\beta}}\,lg\dfrac{u\sqrt{3}+\sqrt{\beta}}{u\sqrt{3}-\sqrt{\beta}} + \pi \\ \vartheta = arc\,tg\,u + \dfrac{3}{\sqrt{\beta}}\,lg\dfrac{u+\sqrt{\beta}}{u-\sqrt{\beta}} - \sqrt[3]{\dfrac{3}{\beta}}\,lg\dfrac{u\sqrt{3}+\sqrt{\beta}}{u\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta}} + \pi \end{cases}$$

Liegt u zwischen 0 und $\sqrt{\frac{\beta}{3}}$, so ist der erste der für ϑ gefundenen Ausdrücke zu nehmen. Für $u=0$ wird $r = -\frac{2a}{\beta}(1+\beta)$ und $\vartheta = \pi$; wird u grösser, so nimmt der absolute Wert von r ab und auch ϑ wird kleiner; für $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ wird $r=0$ und $\vartheta = -\infty$; dieser Zweig der Kurve nähert sich also asymptotisch dem Pol P.

Die Länge dieses Kurvenbogens $OHGP$ ist

$$s = \int_0^{\sqrt{\frac{\beta}{3}}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta$$

$$= -2a(1+\beta) \int_0^{\sqrt{\frac{\beta}{3}}} \frac{3u^4 + 6(1+\beta)u^2 + \beta(2-\beta)}{(u^2-\beta)^3}\, du$$

$$= 2a(1+\beta) \left[\frac{3u^3 + (2-\beta)u^2}{(u^2-\beta)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{\beta}{3}}} = \frac{9a(1+\beta)}{\beta^2}\sqrt{\frac{\beta}{3}}$$

Setzt man in den Gleichungen der negativen Scheitel-Fusspunktenkurve der Hyperbel $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$, so ergiebt sich $x = 0$ und $y = \frac{9a(1+\beta)}{\beta^2}\sqrt{\frac{\beta}{3}}$; so ist somit $s = OL$. Rollt sich demnach der zwischen den Werten $u = 0$ und $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ liegende Bogen $OHGP$ der durch die Gleichungen 4) und 5) ausgedrückten Kurve auf der Ordinatenachse OL ab, so beschreibt der Punkt P den zwischen P und L liegenden Zweig der Roulette.

Wird u grösser als $\sqrt{\frac{\beta}{3}}$, bleibt aber dabei kleiner als $\sqrt{\beta}$, so ist der zweite der für ϑ gefundenen Ausdrücke zu nehmen.

Für $u = \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ war $r = 0$ und $\vartheta = -\infty$ gefunden worden; wird u grösser, so wird r negativ; der absolute Wert von ϑ wird kleiner, ϑ geht schliesslich durch den Wert null hindurch und wird dann weiter positiv. Ist $u = \sqrt{\beta}$ geworden, so ist $r = +\infty$, $\vartheta = +\infty$.

Hat sich somit der Zweig $OHGP$ bis zum Punkte L der Ordinatenachse abgerollt, und hat der Punkt P den Punkt L

erreicht, so rollt sich von hier aus der weitere Zweig *PIK*.. auf; dadurch wird der sich ins Unendliche erstreckende Teil *LM* der Rollkurve erzeugt.

Ist u noch grösser als $\sqrt{\beta}$, so ist der dritte Wert von ϑ zu nehmen. Der Radius Vektor r wird jetzt wieder kleiner und erreicht für $u = \infty$ die Grenze null; auch ϑ nimmt wieder ab und wird schliesslich für $u = \infty$ gleich $\frac{3}{2}\pi$. In der Fig. 15 ist für diesen Zweig der Erzeugenden der Anfangspunkt *O* als Pol gewählt. Rollt sich dieser Zweig *OCD*.. auf der Ordinatenachse ab, so wird dadurch der Bogen *OB* der Roulette erzeugt.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Herrn Prof. Dr. Staude für die Teilnahme am Verlaufe meiner Arbeit meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

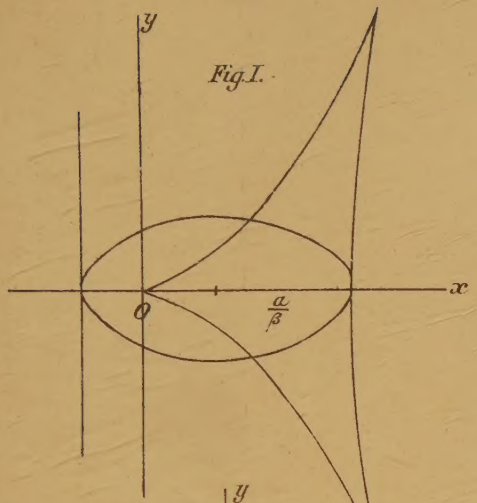


Fig. I.

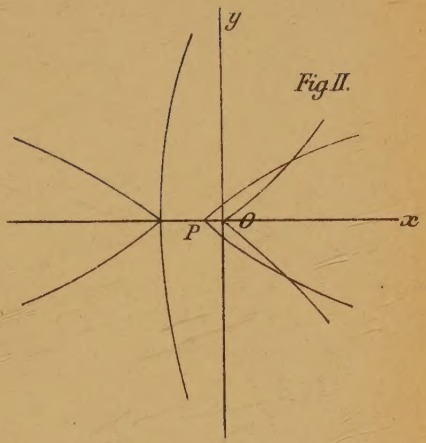
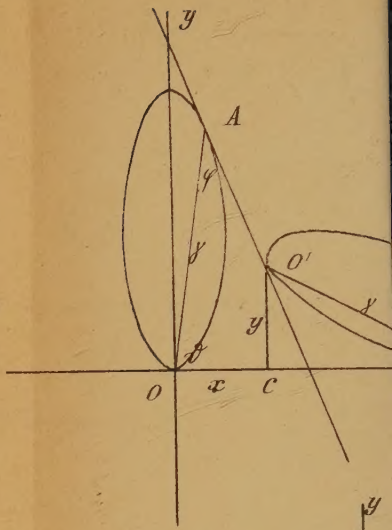


Fig. II.



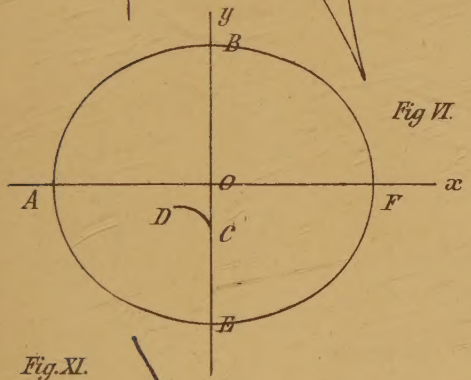


Fig. VI.

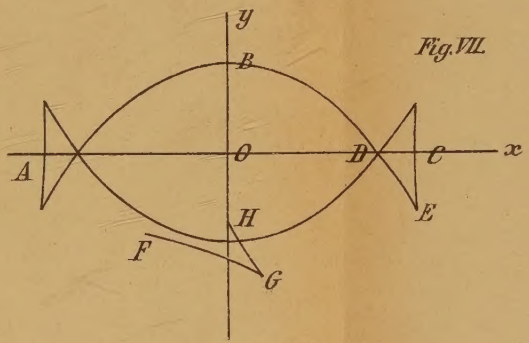
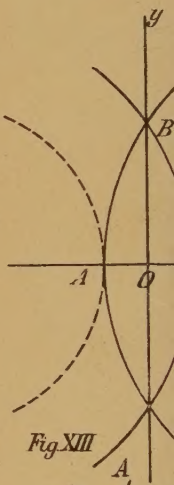


Fig. VII.



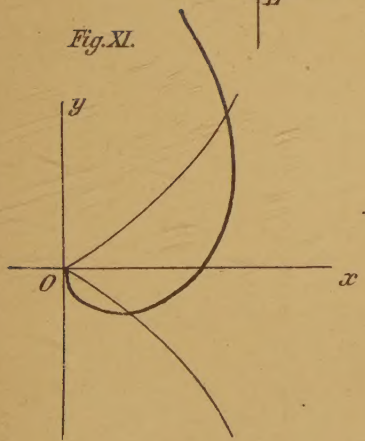


Fig. XI.

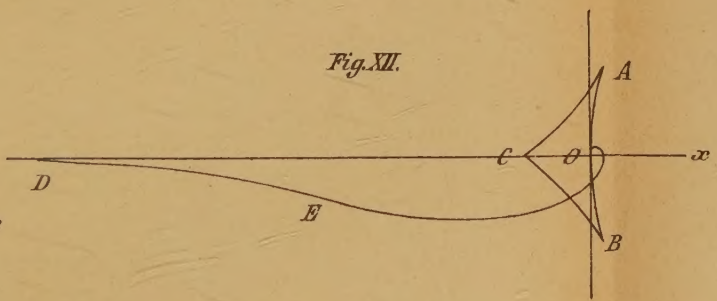


Fig. XII.

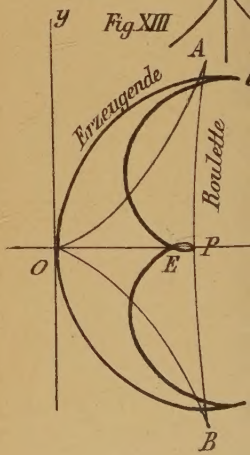


Fig. XIII.

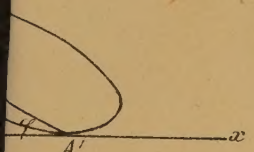


Fig. III.

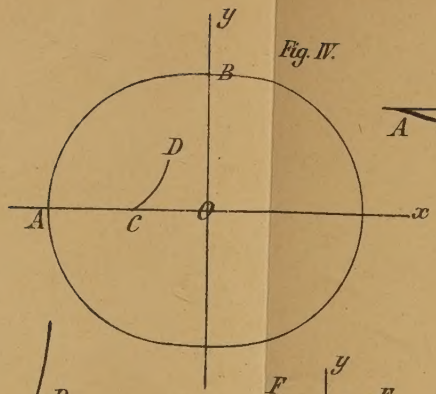


Fig. IV.

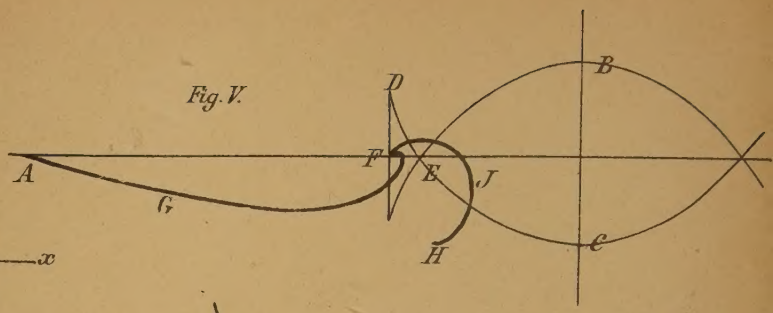


Fig. V.

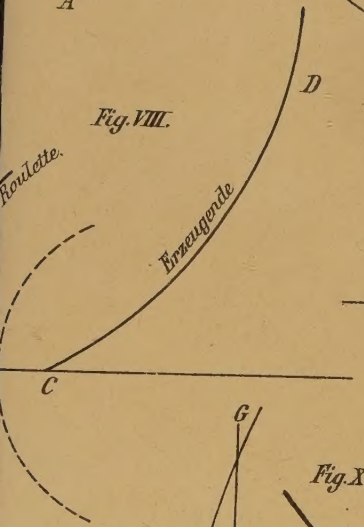


Fig. VIII.

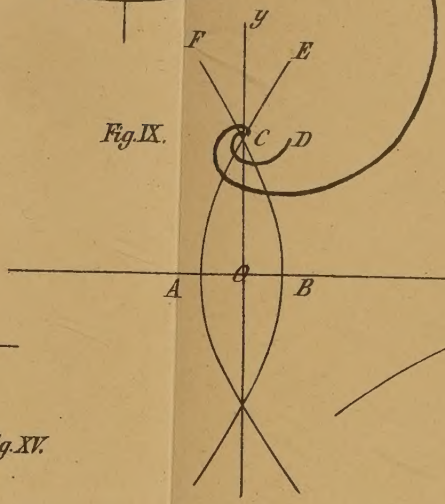


Fig. IX.

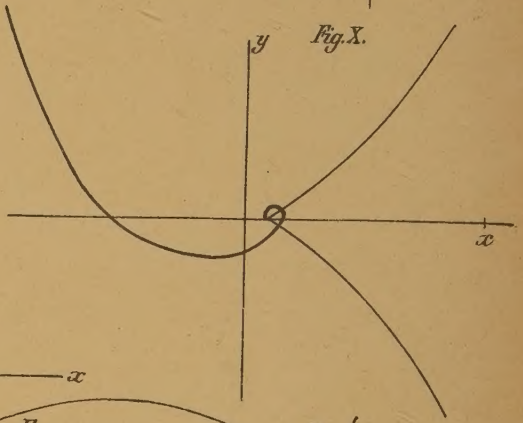


Fig. X.

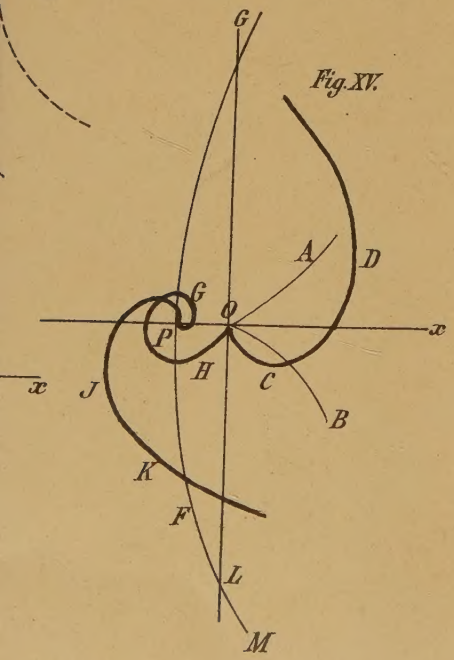


Fig. XV.

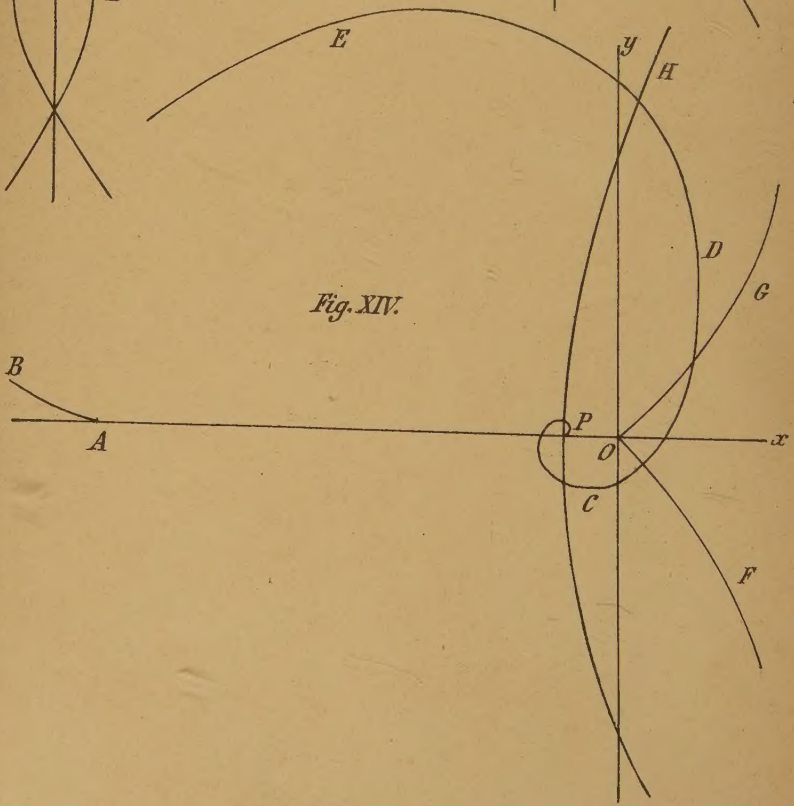


Fig. XIV.